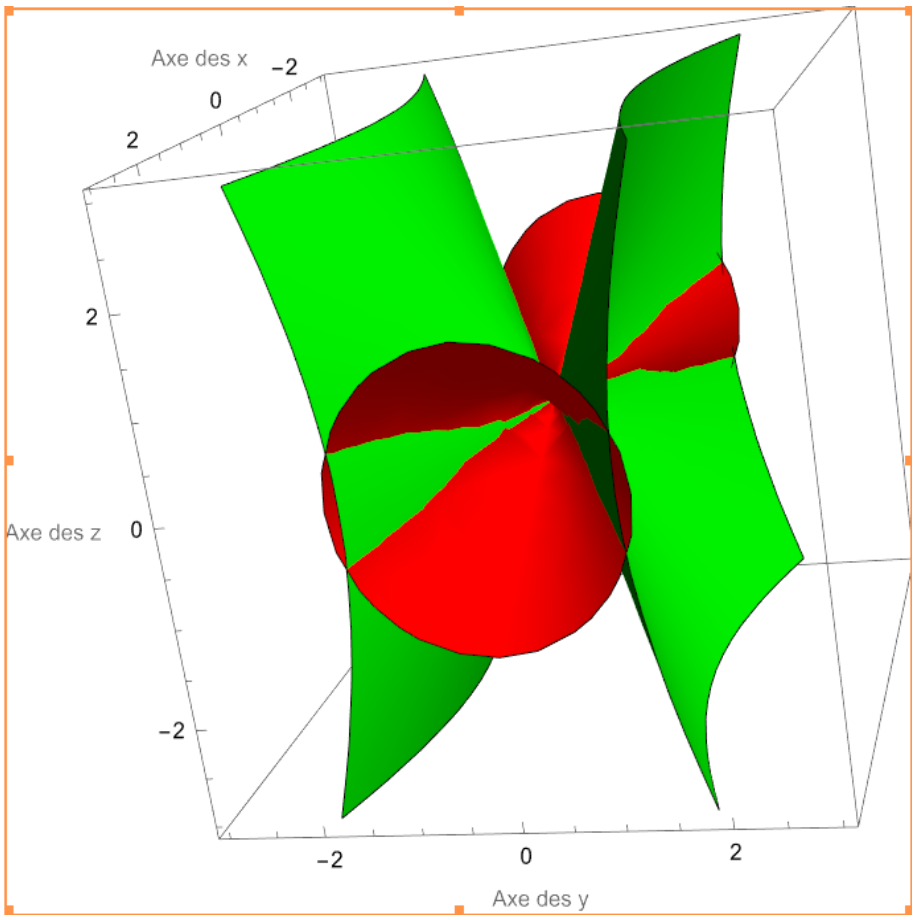
Séparabilité de l'équation de Laplace en 3 et 4 dimensions
pour un système de coordonnées non orthogonales entre elles

Séparabilité d'un système de coordonnées sphéro-coniques non-orthogonales à 3 dimensions

Le système de coordonnées sphéro-coniques possède la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x = u\,\rho \\ y = v\,\rho \\ z = \sqrt{1-u^2-v^2}\;\rho \end{cases} \quad z \geq 0 \qquad \begin{cases} x = u\,\rho \\ y = v\,\rho \\ z = -\sqrt{1-u^2-v^2}\;\rho \end{cases} \quad z < 0 \qquad u^2+v^2 \leq 1 \qquad \begin{cases} u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ v = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$$

Ce n'est pas un système de coordonnées orthogonales. Une simple illustration de deux iso-surfaces en croisement permet de s'en rendre compte :



Les paramètres u,v sont donc censés représentés une position quelconque sur la sphère de rayon ρ, moyennant la duplication des coordonnées sur les deux hémisphères.

Dans ce type de paramétrisation, le plan équatorial z=0 est représenté par la relation $u^2+v^2=1$ et la variation du rayon ρ. Le plan équatorial est donc représenté par une suite de cercle concentrique ρ=Cste sur lequel se vérifie la contrainte $u^2+v^2=1$ .Sur ce même plan équatorial l'origine sera indifféremment représentée par toute valeur de u,v tant que ρ=0.

La valeur u=1, contraint v=0 et correspond à l'axe des x. La valeur v=1, contraint u=0 et correspond à l'axe des y. L'iso-surface u=Cste correspond à un cône centré sur l'axe des x qui s'évase lorsque u décroît vers 0 pour devenir le plan (yz) . L'iso-surface v=Cste correspond à un cône centré sur l'axe des y qui s'évase lorsque v décroît vers 0 pour devenir le plan (xz) .

Les éléments métriques de ce système de coordonnées vont nous permettre de représenter la forme du Laplacien, qui s'avère être le « Laplacien de Beltrami », formalisme utile pour se placer dans le cadre de coordonnées curvilignes générales (voir plus loin dans le document). La matrice Jacobienne s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & u \\ 0 & \rho & v \\ -u\dfrac{\rho}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & -v\dfrac{\rho}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & \sqrt{1-u^2-v^2} \end{pmatrix}$$

Le tenseur métrique contravariant est le suivant :

$$g_{ij} = \mathbf{J}^T.\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \left(\left(1-v^2\right)\rho^2\right)/\left(1-u^2-v^2\right) & \left(uv\rho^2\right)/\left(1-u^2-v^2\right) & 0 \\ \left(uv\rho^2\right)/\left(1-u^2-v^2\right) & \left(\left(1-u^2\right)\rho^2\right)/\left(1-u^2-v^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le tenseur métrique covariant est le suivant (matrice inverse du tenseur métrique contravariant) :

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\rho^2}\left(1-u^2\right) & -\dfrac{1}{\rho^2}uv & 0 \\ -\dfrac{1}{\rho^2}uv & \dfrac{1}{\rho^2}\left(1-v^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant du tenseur métrique contravariant est particulièrement simple :

$$\det\left(g_{ij}\right) = \frac{\rho^4}{1-u^2-v^2} \Rightarrow \sqrt{\left|\det\left(g_{ij}\right)\right|} = \frac{\rho^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$$

L'équation de Laplace-Beltrami s'écrit alors :

$$\Delta T = \frac{1}{\sqrt{|\det(\mathbf{G})|}}\partial_i\left(\sqrt{|\det(\mathbf{G})|}g^{ij}\partial_j T\right)\Leftrightarrow$$

$$\Delta T = \frac{\sqrt{1-u^2-v^2}}{\rho^2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1-u^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial u}-\frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{1-v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial v}\right)+\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)\right\}$$

$$\Delta T = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-u^2-v^2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1-u^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial u}-\frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{1-v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial v}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)=0$$

J'exposerais plus loin une extension des polynômes de Legendre à deux dimensions permettant la séparation de l'équation de Laplace précédente. Mais avant cela introduisons les dès à présent. Les fonctions $R^2_{m,n}(x,y)$ sont définies comme suit :

$$\begin{cases}\dfrac{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(a\,x+b\,y-1\right)^2+\left(a^2+b^2\right)\left(1-x^2-y^2\right)}=\displaystyle\sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty}a^m b^n R^2_{m,n}(x,y)\\ U^2_{m,n}(x,y)=\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}R^2_{m,n}(x,y)\end{cases}$$

Dont les deux équations aux dérivées partielles et la sommation de ces dernières sont les suivantes :

$$\begin{cases}\left(1-x^2\right)\dfrac{\partial^2 R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x^2}-x\,y\,\dfrac{\partial^2 R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x\partial y}+(n+m)\,x\,\dfrac{\partial R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x}-(m+1)\left(x\,\dfrac{\partial R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x}+y\,\dfrac{\partial R^2_{m,n}(x,y)}{\partial y}\right)+(m+1)(m+n+1)R^2_{m,n}(x,y)=0\\ \left(1-y^2\right)\dfrac{\partial^2 R^2_{m,n}(x,y)}{\partial y^2}-x\,y\,\dfrac{\partial^2 R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x\partial y}+(n+m)\,y\,\dfrac{\partial R^2_{m,n}(x,y)}{\partial y}-(n+1)\left(x\,\dfrac{\partial R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x}+y\,\dfrac{\partial R^2_{m,n}(x,y)}{\partial y}\right)+(n+1)(m+n+1)R^2_{m,n}(x,y)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(1-x^2\right)\frac{\partial^2 R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x^2}+\left(1-y^2\right)\frac{\partial^2 R^2_{m,n}(x,y)}{\partial y^2}-2x\,y\,\frac{\partial^2 R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x\partial y}-2\,x\,\frac{\partial R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x}-2\,y\,\frac{\partial R^2_{m,n}(x,y)}{\partial y}=-(m+n+1)(m+n+2)\,R^2_{m,n}(x,y)$$

En revenant à l'équation de Laplace précédente, en développant les termes en u et v, il apparaît les termes de l'équation aux dérivées partielles de la fonction $R^2_{m,n}(x,y)$:

$$\sqrt{1-u^2-v^2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1-u^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial u}-\frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{1-v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial v}\right)\right\}$$
$$=\left(1-u^2\right)\frac{\partial^2 T}{\partial u}+\left(1-v^2\right)\frac{\partial^2 T}{\partial v^2}-2\,u\,v\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}-2\,u\frac{\partial T}{\partial u}-2\,v\frac{\partial T}{\partial v}$$

Ainsi si l'on sépare la solution recherchée de l'équation de Laplace sous la forme $T=R^2_{m,n}(u,v)\,\Omega(\rho)$*, alors la fonction Ω est solution de l'équation différentielle ordinaire :*

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d\,\Omega(\rho)}{d\rho}\right)-(m+n+1)(m+n+2)\,\Omega(\rho)=0$$

Remarque : le terme $(m+n+1)(m+n+2)$ *équivaut à l'introduction de la variable de séparation dans l'équation de Laplace.*

Cette équation radiale possède la solution générale suivante :

$$\Omega(\rho)=\rho^{\alpha}\Rightarrow\alpha(\alpha+1)=(m+n+1)(m+n+2)\Rightarrow\begin{cases}\alpha=m+n+1\\ \alpha=-(m+n+2)\end{cases}\Rightarrow\Omega(\rho)=A\rho^{m+n+1}+B\rho^{-(m+n+2)}$$

On peut donc proposer comme solution séparable dans ce système de coordonnées sphéro-conique la forme suivante :

$$T(u,v,\rho)=\sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\left(A_{m,n}\rho^{m+n+1}+B_{m,n}\rho^{-(m+n+2)}\right)R^2_{m,n}(u,v)$$

Ce type de développement est-il exploitable dans le cadre d'un problème aux limites, par exemple le plus « simple » comme celui de Dirichlet. La réponse réside dans le fait qu'au moins toute fonction f(u,v) ayant des propriétés suffisantes de régularité, ainsi que ses dérivées premières et étant bornées, ainsi que ces dérivées premières, dans le domaine u2+v2<=1 peut se représenter sous la forme d'un tel développement. Cela veut simplement dire que le système de fonction R est complet dans cet ensemble fonctionnel.

Ce « Théorème » de représentation a été exposé dans deux ouvrages sur les fonctions hyper-sphérique et hypergéométriques à plusieurs variables, la thèse de 1914 de J.Kampé-de-Fériet « Sur les fonctions hypersphériques » chapitre IV « Développement d'une fonction arbitraire en série de polynômes zonaux », page 69 et celui de 1926 de P.Appell et J.Kampé-de-Fériet, « Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, polynomes d'Hermite » chapitre V « Développement d'une fonction arbitraire en série de polynômes et fonctions $V^s_{m1,\dots,mN}(x_1,..,x_N)$, $U^s_{m1,\dots,mN}(x_1,..,x_N)$ *et* $R^s_{m1,\dots,mN}(x_1,..,x_N)$.

Voici quelques détails introductifs de ces polynômes et du théorème de représentation. Les fonctions $V^s_{m1,\dots,mN}(x_1,..,x_N)$, $U^s_{m1,\dots,mN}(x_1,..,x_N)$ *et* $R^s_{m1,\dots,mN}(x_1,..,x_N)$. *sont définis par leur fonctions génératrices suivantes :*

$$\left((a_1x_1+\dots+a_Nx_N-1)^2+\left(a_1^2+\dots+a_N^2\right)\left(1-x_1^2\dots-x_N^2\right)\right)^{-\frac{s}{2}}=\sum_{m_1=0}^{m_1=+\infty}\dots\sum_{m_N=0}^{m_N=+\infty}a_1^{m_1}\dots a_N^{m_N}U^s_{m_1\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N)$$

$$R^s_{m_1\dots,m_N}(x,y)=\left(1-x_1^2\dots-x_N^2\right)^{\frac{s-1}{2}}U^s_{m_1\dots,m_N}(x,y)\Rightarrow\frac{\left(1-x_1^2\dots-x_N^2\right)^{\frac{s-1}{2}}}{\left((a_1x_1+\dots+a_Nx_N-1)^2+\left(a_1^2+\dots+a_N^2\right)\left(1-x_1^2\dots-x_N^2\right)\right)^{\frac{s}{2}}}=\sum_{m_1=0}^{m_1=+\infty}\dots\sum_{m_N=0}^{m_N=+\infty}a_1^{m_1}\dots a_N^{m_N}R^s_{m_1\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N)$$

$$\left(1-2a_1x_1-\dots-2a_Nx_N+a_1^2+\dots+a_N^2\right)^{-\frac{s+1}{2}}=\sum_{m_1=0}^{m_1=+\infty}\dots\sum_{m_N=0}^{m_N=+\infty}a_1^{m_1}\dots a_N^{m_N}V^s_{m_1\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N)$$

Soit sous forme de dérivations de la formule de Taylor appliquées aux fonctions génératrices :

$$V^s_{m_1\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N)=\frac{1}{m_1!\dots m_N!}\frac{d^{m_1+\dots+m_N}}{da_1^{m_1}\dots da_N^{m_N}}\left\{\left(1-2a_1x_1-\dots-2a_Nx_N+a_1^2+\dots+a_N^2\right)^{-\frac{s+1}{2}}\right\}\Bigg|_{\substack{a_1=0\\ \dots\\ a_N=0}}$$

$$U^s_{m_1\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N)=\frac{1}{m_1!\dots m_N!}\frac{d^{m_1+\dots+m_N}}{da_1^{m_1}\dots da_N^{m_N}}\left\{\left((a_1x_1+\dots+a_Nx_N-1)^2+\left(a_1^2+\dots+a_N^2\right)\left(1-x_1^2\dots-x_N^2\right)\right)^{-\frac{s}{2}}\right\}\Bigg|_{\substack{a_1=0\\ \dots\\ a_N=0}}$$

$$Avec\quad X_N=1-x_1^2\dots-x_N^2$$

$$R^s_{m_1\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N)=X_N^{\frac{s-1}{2}}U^s_{m_1\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N)=\frac{X_N^{\frac{s-1}{2}}}{m_1!\dots m_N!}\frac{d^{m_1+\dots+m_N}}{da_1^{m_1}\dots da_N^{m_N}}\left\{\left((a_1x_1+\dots+a_Nx_N-1)^2+\left(a_1^2+\dots+a_N^2\right)\left(1-x_1^2\dots-x_N^2\right)\right)^{-\frac{s}{2}}\right\}\Bigg|_{\substack{a_1=0\\ \dots\\ a_N=0}}$$

Les fonctions et polynômes $V^s_{m1,...,mN}(x_1,..,x_N)$, $U^s_{m1,...,mN}(x_1,..,x_N)$ et $R^s_{m1,...,mN}(x_1,..,x_N)$ sont également définis par des dérivées partielles suivantes :

$$X_N = 1 - x_1^{\ 2} - ... - x_N^{\ 2} \qquad \Xi_N = 1 + \xi_1^{\ 2} + ... + \xi_N^{\ 2} \qquad \mu = m_1 + ... + m_N$$

$$x_1 = \frac{\xi_1}{\sqrt{1+\xi_1^{\ 2}+...+\xi_N^{\ 2}}} \quad ... \quad x_N = \frac{\xi_N}{\sqrt{1+\xi_1^{\ 2}+...+\xi_N^{\ 2}}} \Leftrightarrow \xi_1 = \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^{\ 2}-...-x_N^{\ 2}}} \quad ... \quad \xi_N = \frac{x_N}{\sqrt{1-x_1^{\ 2}-...-x_N^{\ 2}}}$$

$$\begin{cases} U^s_{m_1...,m_N}(x_1,...,x_N) = \dfrac{(-1)^\mu}{2^\mu}\dfrac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)}\dfrac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}+\mu\right)}\dfrac{(X_N)^{\frac{1-s}{2}}}{m_1!...m_N!}\dfrac{\partial^\mu}{\partial x_1^{\ m_1}...\partial x_N^{\ m_N}}\left\{(X_N)^{\mu+\frac{s-1}{2}}\right\} \\ R^s_{m_1...,m_N}(x_1,...,x_N) = X_N^{\ \frac{s-1}{2}} U^s_{m_1...,m_N}(x_1,...,x_N) = \dfrac{(-1)^\mu}{2^\mu}\dfrac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(s)}\dfrac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}+\mu\right)}\dfrac{1}{m_1!...m_N!}\dfrac{\partial^\mu}{\partial x_1^{\ m_1}...\partial x_N^{\ m_N}}\left\{(X_N)^{\mu+\frac{s-1}{2}}\right\} \\ V^s_{m_1...,m_N}(x_1,...,x_N) = (-1)^\mu \dfrac{\Xi_N^{\ \frac{\mu+N+s-1}{2}}}{m_1!...m_N!}\dfrac{\partial^\mu}{\partial \xi_1^{\ m_1}...\partial \xi_N^{\ m_N}}\left\{\Xi_N^{\ -\frac{N+s-1}{2}}\right\}\Bigg|_{\substack{\xi_1=x_1/\sqrt{X_N} \\ ... \\ \xi_N=x_N/\sqrt{X_N}}} \end{cases}$$

De par leur construction $V^s_{m1,...,mN}(x_1,..,x_N)$, $U^s_{m1,...,mN}(x_1,..,x_N)$ sont des polynômes et $R^s_{m1,...,mN}(x_1,..,x_N)$ une fonction qui s'annule sur l'hypersphère unité pour s>1 :

$$R^s_{m_1...,m_N}(x_1,...,x_N) = X_N^{\ \frac{s-1}{2}} U^s_{m_1...,m_N}(x_1,...,x_N) = 0 \leftarrow X_N = 0 \Leftrightarrow x_1^{\ 2} + ... + x_N^{\ 2} = 1$$

Le théorème de représentation stipule que toute fonction F de plusieurs variables dans le domaine intérieur de l'hypersphère à N dimensions, ayant des conditions suffisamment « convenables » peut se représenter sous la forme d'un développement en polynômes comme suit :

$$F(x_1,...,x_N) = \sum_{m_1=0}^{m_1=+\infty} ... \sum_{m_N=0}^{m_N=+\infty} A_{m_1...,m_N} V^s_{m_1...,m_N}(x_1,...,x_N) \qquad (x_1,...,x_N)/\, X_N = 1 - x_1^{\ 2}...- x_N^{\ 2} \geq 0$$

Les conditions suffisamment « convenables » portent sur l'existence d'un borne supérieure pour toutes les dérivées partielles de la fonction F : $\left|\dfrac{\partial^{m_1+...+m_N} F(x_1,...,x_N)}{dx_1^{\ m_1}...dx_N^{\ m_N}}\right| < H_{m_1...,m_N}$ *et permettent d'assurer la convergence du développement. Il se peut que le théorème de représentation puisse s'appliquer à un espace fonctionnel plus large, mais ce n'est pas étudié dans ces ouvrages.*

Les coefficients du développement se calculent à l'aide des intégrales suivantes :

$$\begin{cases} \mu = m_1 + .. + m_N \qquad \textit{Symbole de Pochhammer} \quad (s,\mu) = \dfrac{\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(\mu)} \qquad (1,m_1) = \Gamma(1+m_1) = m_1! \quad ... \quad (1,m_N) = \Gamma(1+m_N) = m_N! \\ \dfrac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{2\mu+N+s-1}\dfrac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+s-1}{2}\right)}\dfrac{(s,\mu)}{(1,m_1)..(1,m_N)} A_{m_1...,m_N} = \displaystyle\int_{X_N \geq 0}^{N} (X_N)^{\frac{s-1}{2}} F(x_1,...,x_N) U^s_{m_1...,m_N}(x_1,...,x_N)\, dx_1...dx_N \end{cases}$$

Cette formule est justifiée par le fait que les deux jeux de polynômes $V^s_{m1,\dots,mN}(x_1,..,x_N)$ et $U^s_{m1,\dots,mN}(x_1,..,x_N)$ s'avèrent deux à deux orthogonaux suivant le produit scalaire induit par la formule suivante :

$$\begin{cases} \int\limits_{X_N\geq 0}^{N} (X_N)^{\frac{s-1}{2}} V^s_{m_1\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N) U^s_{n_1\dots,n_N}(x_1,\dots,x_N)\, dx_1\dots dx_N = 0 \qquad m_1\neq n_1 \quad ou \quad \dots \quad ou \quad m_N\neq n_N \\ \int\limits_{X_N\geq 0}^{N} (X_N)^{\frac{s-1}{2}} V^s_{m_1\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N) U^s_{m_1\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N)\, dx_1\dots dx_N = \dfrac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{2\mu+N+s-1}\dfrac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+s-1}{2}\right)}\dfrac{(s,\mu)}{(1,m_1)\dots(1,m_N)} \\ N=2 \quad s=2 \rightarrow \int\limits_{x_1^2+x_2^2\leq 1} \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\, V^2_{m_1,m_2}(x_1,x_2) U^2_{m_1,m_2}(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 = \dfrac{2\pi}{2m_1+2m_2+3}\dfrac{(m_1+m_2+1)!}{m_1!\,m_2!} \end{cases}$$

Ce théorème de représentation s'applique par évidence au développement par les polynômes $U^s_{m1,\dots,mN}(x_1,..,x_N)$ car il suffit d'écrire :

$$F(x_1,\dots,x_N) = \sum_{m_1=0}^{m_1=+\infty}\dots\sum_{m_N=0}^{m_N=+\infty} B_{m_1\dots,m_N} U^s_{m_1\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N) \qquad (x_1,\dots,x_N)/\, X_N = 1-x_1^2\dots-x_N^2 \geq 0$$

$$\frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{2\mu+N+s-1}\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+s-1}{2}\right)}\frac{(s,\mu)}{(1,m_1)\dots(1,m_N)} B_{m_1\dots,m_N} = \int\limits_{X_N\geq 0}^{N} (X_N)^{\frac{s-1}{2}} F(x_1,\dots,x_N) V^s_{m_1\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N)\, dx_1\dots dx_N$$

Et également aux développements avec les fonctions $R^s_{m1,\dots,mN}(x_1,..,x_N)$:

$$F(x_1,\dots,x_N) = \sum_{m_1=0}^{m_1=+\infty}\dots\sum_{m_N=0}^{m_N=+\infty} B_{m_1\dots,m_N} U^s_{m_1\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N) \Leftrightarrow \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{2\mu+N+s-1}\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+s-1}{2}\right)}\frac{(s,\mu)}{(1,m_1)\dots(1,m_N)} B_{m_1\dots,m_N} = \int\limits_{X_N\geq 0}^{N} (X_N)^{\frac{s-1}{2}} F(x_1,\dots,x_N) V^s_{m_1\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N)\, dx_1\dots dx_N$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G(x_1,\dots,x_N) = (X_N)^{\frac{s-1}{2}} F(x_1,\dots,x_N) = \sum_{m_1=0}^{m_1=+\infty}\dots\sum_{m_N=0}^{m_N=+\infty} B_{m_1\dots,m_N} R^s_{m_1\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N) \\ \dfrac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{2\mu+N+s-1}\dfrac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+s-1}{2}\right)}\dfrac{(s,\mu)}{(1,m_1)\dots(1,m_N)} B_{m_1\dots,m_N} = \int\limits_{X_N\geq 0}^{N} G(x_1,\dots,x_N) V^s_{m_1\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N)\, dx_1\dots dx_N \end{cases}$$

L'application à deux dimensions pour un développement de la forme : $T(u,v) = \sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_{m,n} R^2_{m,n}(u,v)$

donne donc : $s=2 \quad et \quad N=2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} T(u,v) = \sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_{m,n} R^2_{m,n}(u,v) \\ A_{m,n} = \dfrac{m!\,n!(2m+2n+3)}{2\pi(m+n+1)!}\int\limits_{u^2+u^2\leq 1} du dv\, T(u,v) V^2_{m,n}(u,v) \end{cases}$

<u>Application à la construction du problème intérieur de Dirichlet de l'équation de Laplace sur la sphère</u>

Selon le système de coordonnées : $\begin{cases} x = u\,\rho \\ y = v\,\rho \\ z = \sqrt{1-u^2-v^2}\;\rho \end{cases} \quad z \geq 0 \qquad \begin{cases} x = u\,\rho \\ y = v\,\rho \\ z = -\sqrt{1-u^2-v^2}\;\rho \end{cases} \quad z < 0$

étant donné que la paramétrisation est double selon les z positifs et négatifs, il convient peut-être de scinder le problème aux limites de Dirichlet : $\Delta T = 0 \qquad T(u,v,\rho)\big|_{\rho=R} = f(u,v)$ *en deux sous-problèmes selon le principe de superposition. Pour chacun de ces sous-problèmes, lorsque les conditions aux limites sont symétriques en z, cela signifie que la dérivée première de la fonction selon z doit s'annuler sur le plan équatorial*

Or la dérivée première selon z s'écrit :

$$\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial v} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial \rho} = \sqrt{1-u^2-v^2}\left\{-\frac{u}{\rho}\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial u} - \frac{v}{\rho}\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial v} + \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial \rho}\right\}$$

Avec un développement de la forme $T(u,v,\rho) = \sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_{m,n}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+n+1} R^2_{m,n}(u,v)$ *, le troisième terme de la dérivée* $\sqrt{1-u^2-v^2}\,\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial \rho} = 0$. *Par contre le terme* $\sqrt{1-u^2-v^2}\left\{u\,\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial u} + v\,\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial v}\right\}$ *lui ne s'annule pas forcément du fait de la dérivée première du terme* $\sqrt{1-u^2-v^2}$. *On écrit plus en détail terme à terme :*

$$\sqrt{1-u^2-v^2}\left\{u\,\frac{\partial R^2_{m,n}(u,v)}{\partial u} + v\,\frac{\partial R^2_{m,n}(u,v)}{\partial v}\right\} = \sqrt{1-u^2-v^2}\left\{u\,\frac{\partial\left\{\sqrt{1-u^2-v^2}\,U^2_{m,n}(u,v)\right\}}{\partial u} + v\,\frac{\partial\left\{\sqrt{1-u^2-v^2}\,U^2_{m,n}(u,v)\right\}}{\partial v}\right\}$$

$$Pour \quad 1-u^2-v^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{1-u^2-v^2}\left\{u\,\frac{\partial\left\{\sqrt{1-u^2-v^2}\right\}}{\partial u}U^2_{m,n}(u,v) + v\,\frac{\partial\left\{\sqrt{1-u^2-v^2}\right\}}{\partial v}U^2_{m,n}(u,v)\right\} = -\left(u^2+v^2\right)U^2_{m,n}(u,v) = -U^2_{m,n}(u,v)$$

Donc la condition pour que le gradient en z de la solution s'annule est que le développement en polynômes $U^2_{m,n}(u,v)$ *s'annule de même :*

$$\sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_{m,n}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+n+1} U^2_{m,n}(u,v) = 0 \quad \forall\rho \quad et \quad u^2+v^2 = 1$$

Comme cette condition doit être vraie quelque soit le rayon ρ, on en déduit que la sous-sommation sur un même degré des polynômes en $U^2_{m,n}(u,v)$ *doit être nulle, mais aussi qu'elle doit se vérifier quelque soit le jeu de coefficient, alors :* $\forall m,n \quad U^2_{m,n}(u,v) = 0 \quad pour \quad u^2+v^2 = 1$. *Mais l'on peut démontrer que la forme des polynômes* $U^2_{m,n}(u,v)$ *est particulièrement simple : à une constante près il s'agit du produit d'un monôme en u et d'un monôme en v :*

$$\forall m,n \quad U^2_{m,n}(u,v) \propto u^m v^n \quad pour \quad u^2+v^2 = 1$$

qui ne peut donc être nulle sauf aux valeurs particulières u=0,1 soit v=1,0. En d'autre termes le développement $\sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_{m,n}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+n+1} R^2_{m,n}(u,v)$ *n'est pas adapté pour représenter une solution harmonique aux conditions limites symétriques en z.*

Lorsque le problème est anti-symétrique alors la fonction doit s'annuler sur ce même plan équatorial, or avec un développement de la forme : $T(u,v,\rho)=\sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty}A_{m,n}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+n+1}R_{m,n}^2(u,v)$ *, la solution s'annule de fait car* $\forall m,n \quad R_{m,n}^2(u,v)=0 \quad pour \quad u^2+v^2=1$ *. Alors la solution du problème de Dirichlet :*

$$\Delta T=0 \qquad \begin{cases} T(u,v,\rho)\big|_{\rho=R}=f(u,v) \\ T(x,y,z)\big|_{z=0}=T(u,v,\rho)\big|_{u^2+v^2=1}=0 \end{cases}$$

Est de la forme :

$$\begin{cases} T(u,v,\rho)=\sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty}A_{m,n}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{m+n+1}R_{m,n}^2(u,v) \\ A_{m,n}=\frac{m!\,n!(2m+2n+3)}{2\,\pi(m+n+1)!}\int_{u^2+u^2\le 1}dudv\; f(u,v)V_{m,n}^2(u,v) \end{cases}$$

Si maintenant la fonction limite f(u,v) sur l'hémisphère supérieure est pris comme une constante égale à 1 alors certaines intégrales s'annulent de facto du fait des propriétés de parité des polynômes $V^2_{m,n}(u,v)$ *. Ces derniers suive en u et v la parité de l'indice correspondant :*

$$V_{m,n}^2(\varepsilon_1 u,\varepsilon_2 v)=(-1)^{m\varepsilon_1+n\varepsilon_2}V_{m,n}^2(u,v)\Rightarrow \int_{u^2+u^2\le 1}dudv\,V_{m,n}^2(u,v)=0 \quad pour \quad m \quad ou \quad n \quad impair$$

La sommation ne se développe donc que sur les seuls indices m,n pairs, soit :

$$\begin{cases} T(u,v,\rho)=\sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty}A_{m,n}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2m+2n+1}R_{2m,2n}^2(u,v) \\ f(u,v)=1\Rightarrow A_{m,n}=\frac{(2m)!\,(2n)!(4m+4n+3)}{2\,\pi(2m+2n+1)!}\int_{u^2+u^2\le 1}dudv\,V_{2m,2n}^2(u,v) \end{cases}$$

À finir bien comprendre ce point, je suis rouillé ! Pourtant ce doit être simple !! et surtout tester numériquement

<u>Séparabilité d'un système de coordonnées axi-symétrique orthogonale à 3 dimensions</u>

Pour un système de coordonnées supposées orthogonales de type axi-symétrique autour de z (c'est à dire que toutes les iso-surfaces du système sont symétriques autour de l'axe z), la paramétrisation du système à 3 dimensions peut être représentée sous la forme :

$$\begin{cases} x = F(\rho,\sigma)Cos(\varphi) \\ y = F(\rho,\sigma)Sin(\varphi) \\ z = \Phi(\rho,\sigma) \end{cases} \Rightarrow ds^2 = h_\rho^2 d\rho^2 + h_\sigma^2 d\sigma^2 + h_\varphi^2 d\varphi^2 \quad \begin{cases} h_\rho^2 = \left(\dfrac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi(\rho,\sigma)}{\partial \rho}\right)^2 \\ h_\sigma^2 = \left(\dfrac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi(\rho,\sigma)}{\partial \sigma}\right)^2 \\ h_\varphi^2 = (F(\rho,\sigma))^2 \end{cases}$$

Lorsque le système est orthogonal, Le laplacien et les éléments métrique ont la forme suivante :

$$g = h_\rho^2 h_\sigma^2 h_\varphi^2 \quad \sqrt{g} = h_\rho h_\sigma h_\varphi \rightarrow \Delta T = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\sqrt{g}}{h_\rho^2}\frac{\partial T}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\sqrt{g}}{h_\sigma^2}\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\sqrt{g}}{h_\varphi^2}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) = 0$$

$$\begin{cases} h_\rho = \sqrt{\left(\dfrac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi(\rho,\sigma)}{\partial \rho}\right)^2} \\ h_\sigma = \sqrt{\left(\dfrac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi(\rho,\sigma)}{\partial \sigma}\right)^2} \\ h_\rho = F(\rho,\sigma) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \rho}\left(F(\rho,\sigma)\frac{h_\sigma}{h_\rho}\frac{\partial T}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(F(\rho,\sigma)\frac{h_\rho}{h_\sigma}\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right) + \frac{h_\rho h_\sigma}{F(\rho,\sigma)}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0$$

Avec une solution séparable de la forme l'équation de Laplace restreintes aux coordonnées ρ,σ devient :

$$T(\rho,\sigma,\varphi) = U(\rho,\sigma)Cos((m+1)\varphi) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \rho}\left(F(\rho,\sigma)\frac{h_\sigma}{h_\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(F(\rho,\sigma)\frac{h_\rho}{h_\sigma}\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right) - \frac{(m+1)^2}{F(\rho,\sigma)}h_\rho h_\sigma U(\rho,\sigma) = 0$$

La condition d'orthogonalité est alors vérifiée lorsque les deux fonctions F et Φ vérifient la relation suivante :

$$\frac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial \rho}\frac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi(\rho,\sigma)}{\partial \rho}\frac{\partial \Phi(\rho,\sigma)}{\partial \sigma} = 0$$

<u>Extension à la séparabilité d'un système de coordonnées à 4 dimensions non-orthogonales</u>

Avant de rentrer dans le vif du sujet, faisons quelques rappels utiles de géométrie différentielle uniquement appliqués aux changement de variable conduisant aux systèmes de coordonnées curvilignes. Un simple exemple à 3 dimensions suffit pour comprendre. Nous allons d'abord rester dans le cadre d'un changement de variable de forme la plus générale possible et introduire les éléments différentiels utiles pour le manipuler.

$$\begin{cases} x_1 = f_1(q^1, q^2, q^3) \\ x_2 = f_2(q^1, q^2, q^3) \\ x_3 = f_3(q^1, q^2, q^3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^1 = g^1(x_1, x_2, x_3) \\ q^2 = g^2(x_1, x_2, x_3) \\ q^3 = g^3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

On va supposer que toutes ces fonctions sont continues et dérivables dans le domaine des variables des deux jeux de variables. Les iso-surfaces du système de coordonnées curvilignes $q^1 = Cste \quad q^2 = Cste \quad q^3 = Cste$ *s'appellent des surfaces de coordonnées, les courbes de coordonnées sont formées par les intersections de ces surfaces de coordonnées. Lorsque les coordonnées curvilignes sont dîtes orthogonales, alors les vecteurs tangents aux courbes de coordonnées, qui sont en intersection, sont orthogonaux entre eux.*

On peut construire une base de vecteurs indépendants dans le système de coordonnées qi par les dérivée première d'un point x dans l'espace :

$$x^i = (x_1, x_2, x_3) \quad \begin{cases} h_1 = \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial q^1}, \dfrac{\partial x_2}{\partial q^1}, \dfrac{\partial x_3}{\partial q^1} \right) \\ h_2 = \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial q^2}, \dfrac{\partial x_2}{\partial q^2}, \dfrac{\partial x_3}{\partial q^2} \right) \\ h_3 = \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial q^3}, \dfrac{\partial x_2}{\partial q^3}, \dfrac{\partial x_3}{\partial q^3} \right) \end{cases}$$

Cette base est appelée base contravariante, elle peut être rendue normée par division par la norme. Cette base n'est pas à priori orthogonale. La base des vecteurs construite comme suit :

$$q^i = (q^1, q^2, q^3) \quad \begin{cases} h^1 = \left(\dfrac{\partial q^1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial q^2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial q^2}{\partial x_1} \right) \\ h^2 = \left(\dfrac{\partial q^1}{\partial x_2}, \dfrac{\partial q^2}{\partial x_2}, \dfrac{\partial q^2}{\partial x_2} \right) \\ h^3 = \left(\dfrac{\partial q^1}{\partial x_3}, \dfrac{\partial q^2}{\partial x_3}, \dfrac{\partial q^2}{\partial x_3} \right) \end{cases}$$

est appelée base covariante. On peut démontrer que cette dernière est orthogonale deux à deux avec la base contravariante pour les indices inégaux :

$$\forall i, j \quad h^i . h_j = \delta^i_j \quad \delta^i_j \quad symbole\ de\ Kronecker = 1 \quad si\ i = j \quad = 0\ si\ i \neq j$$

*Un déplacement infinitésimal dans l'espace se mesure par la distance d**x** :*

$$d\mathbf{x} = dq^i.h_i \Rightarrow ds^2 = |d\mathbf{x}|^2 = dq^i dq^j h_i h_j$$

Ici j'introduis la notation d'Einstein, pour laquelle lorsque les indices i sont communs à l'expression en position covariante (indice supérieur) et contravariante (indice inférieur) alors la sommation sur toutes les valeurs est sous-entendue. Il s'agit lorsque les formes différentielles n'implique qu'un ou deux jeux d'indice tout simplement d'un produit scalaire ou d'un produit matriciel.

La matrice formée en colonne par la base contravariante de vecteurs est appelée la matrice Jacobienne. L'inverse de cette matrice est constituée en colonne par la base covariante de vecteurs :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q^1} & \frac{\partial x_1}{\partial q^2} & \frac{\partial x_1}{\partial q^3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q^1} & \frac{\partial x_2}{\partial q^2} & \frac{\partial x_2}{\partial q^3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q^1} & \frac{\partial x_3}{\partial q^2} & \frac{\partial x_3}{\partial q^3} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial x_1} & \frac{\partial q^1}{\partial x_2} & \frac{\partial q^1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial q^2}{\partial x_1} & \frac{\partial q^2}{\partial x_2} & \frac{\partial q^2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial q^2}{\partial x_1} & \frac{\partial q^2}{\partial x_2} & \frac{\partial q^2}{\partial x_3} \end{pmatrix} \qquad J.J^{-1} = \mathbf{1} = h^i.h_j = \delta^i_j$$

La matrice jacobienne exprime la transformation linéaire locale des vecteurs de base du système de coordonnées x_i vers le système de coordonnée q^i et inversement.

En terme de distance infinitésimale dans l'espace, cette dernière que l'on appelle « métrique » est alors exprimée sous forme tensorielle de la manière suivante :

$$ds^2 = |d\mathbf{x}|^2 = \frac{\partial x_k}{dq^i}\frac{\partial x_k}{dq^j} dq^i dq^j = g_{ij} dq^i dq^j \rightarrow g_{ij} = \frac{\partial x_k}{dq^i}\frac{\partial x_k}{dq^j}$$

En terme matricielle cela s'écrit également : $ds^2 = d\mathbf{q}.\mathbf{J}^T.\mathbf{J}.d\mathbf{q} = \qquad d\mathbf{q} = (dq^1, dq^2, dq^3) \Rightarrow g_{ij} = \mathbf{J}^T.\mathbf{J}$

Alors le tenseur métrique g_{ij} contravariant n'est ni plus ni moins que le produit de la transposée de la matrice Jacobienne par elle-même (uniquement dans le contexte d'un changement de coordonnées qui transforme l'espace tout entier en lui-même). On introduit dans ce contexte le tenseur métrique covariant g^{ij} comme l'inverse de la matrice correspondant au tenseur métrique contravariant :

$$\begin{cases} g^{ij} = \frac{\partial q^k}{dx_i}\frac{\partial q^k}{dx_j} \\ g_{ij} = \frac{\partial x_k}{dq^i}\frac{\partial x_k}{dq^j} \end{cases} \Rightarrow g_{ij} = \mathbf{J}^T.\mathbf{J} \qquad g^{ij} = (\mathbf{J}^T.\mathbf{J})^{-1} = \mathbf{J}^{-1}.(\mathbf{J}^T)^{-1} = \mathbf{J}^{-1}.(\mathbf{J}^{-1})^T$$

Lorsque les nouvelles coordonnées sont orthogonales alors le tenseur métrique est une matrice diagonale et la métrique s'exprime à l'aide des coefficients de lamé qui sont les termes diagonaux de ce tenseur : $ds^2 = (h_i)^2 (dq^j)^2 \qquad (h_i)^2 = g_{ii} = \frac{\partial x_k}{dq^i}\frac{\partial x_k}{dq^i}$.

Dans le cas de coordonnées orthogonales alors le Laplacien s'écrit sous une forme assez simple :

$$g = \det(\mathbf{J}^T.\mathbf{J}) = h_1^2 h_2^2 h_2^2 \quad \sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \rightarrow \Delta T = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{\sqrt{g}}{h_1^2}\frac{\partial T}{\partial q^1}\right) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{\sqrt{g}}{h_2^2}\frac{\partial T}{\partial q^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^3}\left(\frac{\sqrt{g}}{h_3^2}\frac{\partial T}{\partial q^3}\right)$$

Dans le cas d'un système de coordonnées non-orthogonales, on peut utiliser l'expression plus générale du Laplacien de Beltrami, dans ce contexte de changement de variable :

$$\mathbf{G} = (g_{ij}) = \mathbf{J}^T.\mathbf{J} \qquad \rightarrow \Delta T = \frac{1}{\sqrt{|\det(\mathbf{G})|}}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\sqrt{|\det(\mathbf{G})|}\, g^{ij}\frac{\partial T}{\partial q^j}\right)$$

On note encore plus brièvement les dérivées partielles sous la forme :

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i} \Rightarrow \Delta T = \frac{1}{\sqrt{|\det(\mathbf{G})|}}\partial_i\left(\sqrt{|\det(\mathbf{G})|}\, g^{ij}\partial_j T\right)$$

C'est une forme extrêmement condensée mais en réalité si l'on devait l'exprimer avec les expressions générales de la transformation des coordonnées, cette expression est horriblement complexe, y compris dans le cadre d'un système de coordonnées orthogonales.

Appliquons ces expressions au système de coordonnées non-orthogonale à 4 dimensions proposée par Pierre Humbert en 1936 dans son livre « Potentiels et prépotentiels » en page 34 :

$$\begin{cases} x = u\, F(\rho,\sigma) \\ y = v\, F(\rho,\sigma) \\ z = \sqrt{1-u^2-v^2}\, F(\rho,\sigma) \\ w = \Phi(\rho,\sigma) \end{cases}$$

Les fonctions F et Φ s'entendent ici des fonctions similaires à celles assurant l'orthogonalité d'un système de coordonnées à 3 dimensions dont la paramétrisation est la suivante :

$$\begin{cases} x = F(\rho,\sigma)Cos(\varphi) \\ y = F(\rho,\sigma)Sin(\varphi) \\ z = \Phi(\rho,\sigma) \end{cases} \quad avec \quad \begin{cases} \frac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial \rho}\frac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi(\rho,\sigma)}{\partial \rho}\frac{\partial \Phi(\rho,\sigma)}{\partial \sigma} = 0 \quad condition\ d'orthogonalité \\ R(\rho,\sigma) = \left(\frac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi(\rho,\sigma)}{\partial \rho}\right)^2 \\ S(\rho,\sigma) = \left(\frac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi(\rho,\sigma)}{\partial \sigma}\right)^2 \end{cases}$$

Calculons alors le Laplacien de Beltrami pour un tel changement de variable et pour cela commençons par les diverses matrices ou tenseurs métriques. C'est plus facile d'effectuer ces calcul avec Mathematica. La matrice Jacobienne s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix} F(\rho,\sigma) & 0 & u\dfrac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial\rho} & u\dfrac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial\sigma} \\ 0 & F(\rho,\sigma) & v\dfrac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial\rho} & v\dfrac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial\sigma} \\ -u\dfrac{F(\rho,\sigma)}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & -v\dfrac{F(\rho,\sigma)}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & \sqrt{1-u^2-v^2}\,\dfrac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial\rho} & \sqrt{1-u^2-v^2}\,\dfrac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial\sigma} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial\Phi(\rho,\sigma)}{\partial\rho} & \dfrac{\partial\Phi(\rho,\sigma)}{\partial\sigma} \end{pmatrix}$$

Le tenseur métrique contravariant est le suivant :

$$g_{ij}=\mathbf{J}^T.\mathbf{J}=\begin{pmatrix} \dfrac{(1-v^2)(F(\rho,\sigma))^2}{1-u^2-v^2} & uv\dfrac{(F(\rho,\sigma))^2}{1-u^2-v^2} & 0 & 0 \\ uv\dfrac{(F(\rho,\sigma))^2}{1-u^2-v^2} & \dfrac{(1-u^2)(F(\rho,\sigma))^2}{1-u^2-v^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R(\rho,\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S(\rho,\sigma) \end{pmatrix}$$

Le tenseur métrique covariant est le suivant (matrice inverse du tenseur métrique contravariant) :

$$g^{ij}=\begin{pmatrix} \dfrac{1-u^2}{(F(\rho,\sigma))^2} & -\dfrac{uv}{(F(\rho,\sigma))^2} & 0 & 0 \\ -\dfrac{uv}{(F(\rho,\sigma))^2} & \dfrac{1-v^2}{(F(\rho,\sigma))^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{R(\rho,\sigma)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{S(\rho,\sigma)} \end{pmatrix}$$

Le déterminant du tenseur métrique contravariant est particulièrement simple :

$$\det(g_{ij})=\frac{(F(\rho,\sigma))^4}{1-u^2-v^2}R(\rho,\sigma)S(\rho,\sigma)\Rightarrow\sqrt{|\det(g_{ij})|}=\frac{(F(\rho,\sigma))^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\sqrt{R(\rho,\sigma)S(\rho,\sigma)}$$

On a donc tous les ingrédients pour calculer « facilement » la forme du Laplacien de Beltrami dans ce cas :

$$\Delta T=\frac{\sqrt{1-u^2-v^2}}{(F(\rho,\sigma))^2\sqrt{R(\rho,\sigma)S(\rho,\sigma)}}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{R(\rho,\sigma)S(\rho,\sigma)}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1-u^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial u}-\frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial v}\right)+\\ \sqrt{R(\rho,\sigma)S(\rho,\sigma)}\,\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{1-v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial v}\right)+\\ +\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left((F(\rho,\sigma))^2\sqrt{\frac{S(\rho,\sigma)}{R(\rho,\sigma)}}\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left((F(\rho,\sigma))^2\sqrt{\frac{R(\rho,\sigma)}{S(\rho,\sigma)}}\frac{\partial T}{\partial\sigma}\right)\right\}\end{array}\right\}$$

$$\Delta T=\left\{\begin{array}{l}\frac{\sqrt{1-u^2-v^2}}{(F(\rho,\sigma))^2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1-u^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial u}-\frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{1-v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial v}\right)\right\}+\\ +\frac{1}{(F(\rho,\sigma))^2\sqrt{R(\rho,\sigma)S(\rho,\sigma)}}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left((F(\rho,\sigma))^2\sqrt{\frac{S(\rho,\sigma)}{R(\rho,\sigma)}}\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left((F(\rho,\sigma))^2\sqrt{\frac{R(\rho,\sigma)}{S(\rho,\sigma)}}\frac{\partial T}{\partial\sigma}\right)\right\}\end{array}\right\}$$

L'équation de Laplace s'écrit donc :

$$\Delta T=0\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{R(\rho,\sigma)S(\rho,\sigma)}\sqrt{1-u^2-v^2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1-u^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial u}-\frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{1-v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial v}\right)\right\}+\\ +\frac{\partial}{\partial\rho}\left((F(\rho,\sigma))^2\sqrt{\frac{S(\rho,\sigma)}{R(\rho,\sigma)}}\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left((F(\rho,\sigma))^2\sqrt{\frac{R(\rho,\sigma)}{S(\rho,\sigma)}}\frac{\partial T}{\partial\sigma}\right)\end{array}\right\}=0$$

<u>Introduction des polynômes orthogonaux à bi-dimensionnels extension des polynômes de Legendre et de Chebyshev U</u>

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par le développement en série de la fonction génératrice suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2a\,x+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{(1-a\,x)^2+a^2(1-x^2)}}=\sum_{n=0}^{n=+\infty}a^nP_n(x)$$

Les polynômes de Chebychev U de seconde espèce sont également définis par le développement en série de la fonction génératrice suivante :

$$\frac{1}{1-2a\,x+a^2}=\sum_{n=0}^{n=+\infty}a^nU_n(x)$$

Les polynômes de Legendre peuvent se construire à l'aide de la formule de dérivation suivante :

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\,n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)^n\right\}$$

Les mathématiciens Charles Hermite et plus tard Paul Appell et J. Kampé de Fériet ont introduit puis travaillé sur des polynômes bidimensionnels et multidimensionnels orthogonaux, dans le cadre de l'étude des fonctions hypergéométriques à deux dimensions et plus. Une étude complète s'y trouve dans l'ouvrage de 1926 : « Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, polynômes d'Hermite ».

Ils ont introduit à ce propos les extensions suivantes à deux dimensions à partir de fonctions génératrice en x,y :

$$\frac{1}{\sqrt{(a\,x+b\,y-1)^2+\left(a^2+b^2\right)\left(1-x^2-y^2\right)}}=\sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty}a^m b^n U_{m,n}(x,y)$$

$$\frac{1}{1-2a\,x-2b\,y+a^2+b^2}=\sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty}a^m b^n V_{m,n}(x,y)$$

Les polynômes $U_{m,n}(x,y)$ sont l'extension des polynômes de Legendre, et les polynômes $V_{m,n}(x,y)$ sont l'extension des polynômes de Tchebychev de deuxième espèce.

Les polynômes $U_{m,n}(x,y)$ peuvent se construire par une formule de dérivation :

$$U_{m,n}(x,y)=\frac{1}{2^{n+m}n!m!}\frac{d^{n+m}}{dx^m dy^n}\left\{\left(x^2+y^2-1\right)^{n+m}\right\}$$

On peut aussi les construire selon les dérivations de la formule de Taylor appliquées à la fonction génératrice :

$$U_{m,n}(x,y)=\frac{1}{n!m!}\frac{d^{n+m}}{da^m db^n}\left\{\frac{1}{\sqrt{(1-a\,x-b\,y)^2+\left(a^2+b^2\right)\left(1-x^2-y^2\right)}}\right\}\Bigg|_{\substack{a=0\\b=0}}$$

Les polynômes $V_{m,n}(x,y)$ peuvent se construire selon les dérivations de la formule de Taylor appliquées à la fonction génératrice :

$$V_{m,n}(x,y)=\frac{1}{n!m!}\frac{d^{n+m}}{da^m db^n}\left\{\frac{1}{1-2a\,x-2b\,y+a^2+b^2}\right\}\Bigg|_{\substack{a=0\\b=0}}$$

Les polynômes $U_{m,n}(x,y)$ sont solutions du système suivant de deux équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases}\left(1-x^2\right)\dfrac{\partial^2 U_{m,n}(x,y)}{\partial x^2}-xy\dfrac{\partial^2 U_{m,n}(x,y)}{\partial x\partial y}+(n-2)x\dfrac{\partial U_{m,n}(x,y)}{\partial x}-(m+1)y\dfrac{\partial U_{m,n}(x,y)}{\partial y}+(m+n)(m+1)U_{m,n}(x,y)=0\\ \left(1-y^2\right)\dfrac{\partial^2 U_{m,n}(x,y)}{\partial y^2}-xy\dfrac{\partial^2 U_{m,n}(x,y)}{\partial x\partial y}+(m-2)y\dfrac{\partial U_{m,n}(x,y)}{\partial y}-(n+1)x\dfrac{\partial U_{m,n}(x,y)}{\partial x}+(m+n)(n+1)U_{m,n}(x,y)=0\end{cases}$$

Les polynômes $V_{m,n}(x,y)$ sont solutions du système de deux équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \left(1-x^2\right)\dfrac{\partial^2 V_{m,n}(x,y)}{\partial x^2} - x\,y\,\dfrac{\partial^2 V_{m,n}(x,y)}{\partial x \partial y} - (n+3)\,x\,\dfrac{\partial V_{m,n}(x,y)}{\partial x} - m\,y\,\dfrac{\partial V_{m,n}(x,y)}{\partial y} + m\,(m+n+2)V_{m,n}(x,y) = 0 \\ \left(1-y^2\right)\dfrac{\partial^2 V_{m,n}(x,y)}{\partial y^2} - x\,y\,\dfrac{\partial^2 V_{m,n}(x,y)}{\partial x \partial y} - (m+3)\,y\,\dfrac{\partial V_{m,n}(x,y)}{\partial y} - n\,x\,\dfrac{\partial V_{m,n}(x,y)}{\partial x} + n\,(m+n+2)V_{m,n}(x,y) = 0 \end{cases}$$

<u>Généralisation des polynômes de Gegenbauer à des polynômes bidimensionnels dû à Pierre Humbert</u>

Le mathématicien Pierre Humbert propose une généralisation tout à fait similaire des polynômes précédent, basée cette fois-ci sur la fonction génératrice des polynômes de Gegenbauer (attention les fonctions R ne sont pas polynômes) :

$$\left(\left(a\,x+b\,y-1\right)^2+\left(a^2+b^2\right)\left(1-x^2-y^2\right)\right)^{-\frac{s}{2}} = \sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty} a^m b^n U^s_{m,n}(x,y)$$

$$R^s_{m,n}(x,y) = \left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{s-1}{2}} U^s_{m,n}(x,y) \Rightarrow \frac{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{s-1}{2}}}{\left(\left(a\,x+b\,y-1\right)^2+\left(a^2+b^2\right)\left(1-x^2-y^2\right)\right)^{\frac{s}{2}}} = \sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty} a^m b^n R^s_{m,n}(x,y)$$

$$\left(1-2a\,x-2b\,y+a^2+b^2\right)^{-\frac{s+1}{2}} = \sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty} a^m b^n V^s_{m,n}(x,y)$$

Cette généralisation est exposée dans l'ouvrage de 1926 des mathématiciens P.Appell et J.Kampé-de-Fériet « Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, polynômes d'Hermite » dans un espace cartésien à un nombre quelconque de dimensions.

Les polynômes $V^s_{m,n}(x,y)$ peuvent se construire selon les dérivations de la formule de Taylor appliquées à la fonction génératrice : $V^s_{m,n}(x,y) = \dfrac{1}{n!m!}\dfrac{d^{n+m}}{da^m db^n}\left\{\left(1-2a\,x-2b\,y+a^2+b^2\right)^{-\frac{s+1}{2}}\right\}\Bigg|_{\substack{a=0\\b=0}}$

Et de même pour les polynômes $U^s_{m,n}(x,y)$ et les fonctions $R^s_{m,n}(x,y)$ associées :

$$U^s_{m,n}(x,y) = \frac{1}{n!m!}\frac{d^{n+m}}{da^m db^n}\left\{\left(\left(a\,x+b\,y-1\right)^2+\left(a^2+b^2\right)\left(1-x^2-y^2\right)\right)^{-\frac{s}{2}}\right\}\Bigg|_{\substack{a=0\\b=0}}$$

$$R^s_{m,n}(x,y) = \frac{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{s-1}{2}}}{n!m!}\frac{d^{n+m}}{da^m db^n}\left\{\left(\left(a\,x+b\,y-1\right)^2+\left(a^2+b^2\right)\left(1-x^2-y^2\right)\right)^{-\frac{s}{2}}\right\}\Bigg|_{\substack{a=0\\b=0}}$$

On peut déduire les systèmes d'équations aux dérivées partielles de ces trois fonctions à partir d'une lecture attentive de l'ouvrage « Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, polynômes d'Hermite » pour les fonctions $R^s_{m,n}(x,y)$ en page 277, formule (37) , pour les polynômes $U^s_{m,n}(x,y)$ en page 278, formule (41) et pour les polynômes $V^s_{m,n}(x,y)$ en page 239, formules (32) et (32bis). Pour les polynômes $V^s_{m,n}(x,y)$, outre la réduction à deux dimensions, la subtilité consiste à remplacer dans la formule (32bis) page 239 le paramètre dimensionnel n par n+s-1, soit n par 1+s en deux dimensions, μ étant la somme des indices du polynôme $V^s_{m,n}(x,y)$, ainsi qu'il est remarqué en page 249, permettant d'obtenir les équations des $V^s_{m,n}(x,y)$ en formule (53) page 250.

Les systèmes d'équations aux dérivées partielles sont alors les suivants :

$$\begin{cases}\left(1-x^2\right)\dfrac{\partial^2 V^s_{m,n}(x,y)}{\partial x^2}-x\,y\,\dfrac{\partial^2 V^s_{m,n}(x,y)}{\partial x\partial y}-(n+s+2)\,x\,\dfrac{\partial V^s_{m,n}(x,y)}{\partial x}-m\,y\,\dfrac{\partial V^s_{m,n}(x,y)}{\partial y}+m\,(m+n+1+s)V^s_{m,n}(x,y)=0\\ \left(1-y^2\right)\dfrac{\partial^2 V^s_{m,n}(x,y)}{\partial y^2}-x\,y\,\dfrac{\partial^2 V^s_{m,n}(x,y)}{\partial x\partial y}-(m+s+2)\,y\,\dfrac{\partial V^s_{m,n}(x,y)}{\partial y}-n\,x\,\dfrac{\partial V^s_{m,n}(x,y)}{\partial x}+n\,(m+n+1+s)V^s_{m,n}(x,y)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(1-x^2\right)\dfrac{\partial^2 R^s_{m,n}(x,y)}{\partial x^2}-x\,y\,\dfrac{\partial^2 R^s_{m,n}(x,y)}{\partial x\partial y}+(n+m+s-2)\,x\,\dfrac{\partial R^s_{m,n}(x,y)}{\partial x}-(m+1)\left(x\dfrac{\partial R^s_{m,n}(x,y)}{\partial x}+y\dfrac{\partial R^s_{m,n}(x,y)}{\partial y}\right)+(m+1)(m+n+s-1)R^s_{m,n}(x,y)=0\\ \left(1-y^2\right)\dfrac{\partial^2 R^s_{m,n}(x,y)}{\partial y^2}-x\,y\,\dfrac{\partial^2 R^s_{m,n}(x,y)}{\partial x\partial y}+(n+m+s-2)\,y\,\dfrac{\partial R^s_{m,n}(x,y)}{\partial y}-(n+1)\left(x\dfrac{\partial R^s_{m,n}(x,y)}{\partial x}+y\dfrac{\partial R^s_{m,n}(x,y)}{\partial y}\right)+(n+1)(m+n+s-1)R^s_{m,n}(x,y)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(1-x^2-y^2\right)\left(\left(1-x^2\right)\dfrac{\partial^2 U^s_{m,n}(x,y)}{\partial x^2}-xy\dfrac{\partial^2 U^s_{m,n}(x,y)}{\partial x\partial y}+(n-2)\,x\,\dfrac{\partial U^s_{m,n}(x,y)}{\partial x}-(m+1)\,y\,\dfrac{\partial U^s_{m,n}(x,y)}{\partial y}+(m+n)(m+1)U^s_{m,n}(x,y)\right)+\\ +(s-1)\left(x\left(1-x^2\right)\dfrac{\partial U^s_{m,n}(x,y)}{\partial x}-x^2y\,\dfrac{\partial U^s_{m,n}(x,y)}{\partial y}+\left(n\,x^2-m\left(1-x^2\right)\right)U^s_{m,n}(x,y)\right)=0\\ \left(1-x^2-y^2\right)\left(\left(1-y^2\right)\dfrac{\partial^2 U^s_{m,n}(x,y)}{\partial y^2}-xy\dfrac{\partial^2 U^s_{m,n}(x,y)}{\partial x\partial y}+(m-2)\,y\,\dfrac{\partial U^s_{m,n}(x,y)}{\partial y}-(n+1)\,x\,\dfrac{\partial U^s_{m,n}(x,y)}{\partial x}+(m+n)(n+1)U^s_{m,n}(x,y)\right)+\\ +(s-1)\left(y\left(1-y^2\right)\dfrac{\partial U^s_{m,n}(x,y)}{\partial y}-y^2x\,\dfrac{\partial U^s_{m,n}(x,y)}{\partial x}+\left(m\,y^2-n\left(1-y^2\right)\right)U^s_{m,n}(x,y)\right)=0\end{cases}$$

Dans le cours du livre de Pierre Humbert « Potentiels et pré-potentiels », 1936, l'auteur utilise les fonctions $R^s_{m,n}(x,y)$ pour s=2 (introduit en page 36 et identifié en page):

$$\begin{cases}R^2_{m,n}(x,y)=\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}U^2_{m,n}(x,y)\\ \dfrac{\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(a\,x+b\,y-1)^2+\left(a^2+b^2\right)\left(1-x^2-y^2\right)}=\displaystyle\sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty}a^m b^n R^2_{m,n}(x,y)\end{cases}$$

Dont les équations aux dérivées partielles sont les suivantes :

$$\begin{cases}\left(1-x^2\right)\dfrac{\partial^2 R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x^2}-x\,y\,\dfrac{\partial^2 R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x\partial y}+(n+m)\,x\,\dfrac{\partial R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x}-(m+1)\left(x\dfrac{\partial R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x}+y\dfrac{\partial R^2_{m,n}(x,y)}{\partial y}\right)+(m+1)(m+n+1)R^2_{m,n}(x,y)=0\\ \left(1-y^2\right)\dfrac{\partial^2 R^2_{m,n}(x,y)}{\partial y^2}-x\,y\,\dfrac{\partial^2 R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x\partial y}+(n+m)\,y\,\dfrac{\partial R^2_{m,n}(x,y)}{\partial y}-(n+1)\left(x\dfrac{\partial R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x}+y\dfrac{\partial R^2_{m,n}(x,y)}{\partial y}\right)+(n+1)(m+n+1)R^2_{m,n}(x,y)=0\end{cases}$$

La sommation des deux équations aux dérivées partielles donne une nouvelle équations au dérivées partielles :

$$\left(1-x^2\right)\frac{\partial^2 R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x^2}+\left(1-y^2\right)\frac{\partial^2 R^2_{m,n}(x,y)}{\partial y^2}-2x\,y\,\frac{\partial^2 R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x\partial y}-2\,x\,\frac{\partial\,R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x}-2\,y\,\frac{\partial\,R^2_{m,n}(x,y)}{\partial y}+(m+n+2)(m+n+1)R^2_{m,n}(x,y)=0$$

$$\Rightarrow\left(1-x^2\right)\frac{\partial^2 R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x^2}+\left(1-y^2\right)\frac{\partial^2 R^2_{m,n}(x,y)}{\partial y^2}-2x\,y\,\frac{\partial^2 R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x\partial y}-2\,x\,\frac{\partial\,R^2_{m,n}(x,y)}{\partial x}-2\,y\,\frac{\partial\,R^2_{m,n}(x,y)}{\partial y}=-(m+n+1)(m+n+2)\,R^2_{m,n}(x,y)$$

<u>Séparabilité de l'équation de Laplace à 4 dimensions</u>

En revenant à l'équation de Laplace précédente :

$$\sqrt{R(\rho,\sigma)S(\rho,\sigma)}\sqrt{1-u^2-v^2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1-u^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial u}-\frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{1-v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial v}\right)\right\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\rho}\left((F(\rho,\sigma))^2\sqrt{\frac{S(\rho,\sigma)}{R(\rho,\sigma)}}\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left((F(\rho,\sigma))^2\sqrt{\frac{R(\rho,\sigma)}{S(\rho,\sigma)}}\frac{\partial T}{\partial\sigma}\right)=0$$

Développons les termes en u et v qui se simplifie et apparaît comme étant les termes de l'équation aux dérivées partielles de la fonction $R^2_{m,n}(x,y)$:

$$\sqrt{1-u^2-v^2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1-u^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial u}-\frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{1-v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{\partial T}{\partial v}\right)\right\}$$
$$=\left(1-u^2\right)\frac{\partial^2 T}{\partial u}+\left(1-v^2\right)\frac{\partial^2 T}{\partial v^2}-2\,u\,v\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}-2\,u\frac{\partial T}{\partial u}-2\,v\frac{\partial T}{\partial v}$$

Si l'on sépare la solution recherchée de l'équation de Laplace, sous la forme :

$$T(\rho,\sigma,u,v)=R^2_{m,n}(u,v)\,\Omega(\rho,\sigma)$$

Alors la transformation de l'équation de Laplace donne une équation aux dérivées partielles pour la fonction Ω s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left((F(\rho,\sigma))^2\sqrt{\frac{S(\rho,\sigma)}{R(\rho,\sigma)}}\frac{\partial\,\Omega(\rho,\sigma)}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left((F(\rho,\sigma))^2\sqrt{\frac{R(\rho,\sigma)}{S(\rho,\sigma)}}\frac{\partial\,\Omega(\rho,\sigma)}{\partial\sigma}\right)-(m+n+1)(m+n+2)\sqrt{R(\rho,\sigma)S(\rho,\sigma)}\Omega(\rho,\sigma)=0$$

équation qui peut également s'écrire sous la forme :

$$F(\rho,\sigma)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(F(\rho,\sigma)\sqrt{\frac{S(\rho,\sigma)}{R(\rho,\sigma)}}\frac{\partial\,\Omega(\rho,\sigma)}{\partial\rho}\right)+F(\rho,\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(F(\rho,\sigma)\sqrt{\frac{R(\rho,\sigma)}{S(\rho,\sigma)}}\frac{\partial\,\Omega(\rho,\sigma)}{\partial\sigma}\right)-$$
$$-(m+n+1)(m+n+2)\sqrt{R(\rho,\sigma)S(\rho,\sigma)}\Omega(\rho,\sigma)+$$
$$+\frac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial\rho}F(\rho,\sigma)\sqrt{\frac{S(\rho,\sigma)}{R(\rho,\sigma)}}\frac{\partial\,\Omega(\rho,\sigma)}{\partial\rho}+\frac{\partial F(\rho,\sigma)}{\partial\sigma}F(\rho,\sigma)\sqrt{\frac{R(\rho,\sigma)}{S(\rho,\sigma)}}\frac{\partial\,\Omega(\rho,\sigma)}{\partial\sigma}=0$$

Comparativement elle est différente de l'équation aux dérivées partielles obtenus par la séparation en trois dimensions dans un système axisymétrique :

$$\begin{cases}x=F(\rho,\sigma)Cos(\varphi)\\ y=F(\rho,\sigma)Sin(\varphi)\\ z=\Phi(\rho,\sigma)\end{cases}\quad T(\rho,\sigma,\varphi)=\Omega(\rho,\sigma)Cos((m+1)\varphi)$$

$$\Rightarrow F(\rho,\sigma)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(F(\rho,\sigma)\sqrt{\frac{S(\rho,\sigma)}{R(\rho,\sigma)}}\frac{\partial\Omega(\rho,\sigma)}{\partial\rho}\right)+F(\rho,\sigma)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(F(\rho,\sigma)\sqrt{\frac{R(\rho,\sigma)}{S(\rho,\sigma)}}\frac{\partial\Omega(\rho,\sigma)}{\partial\sigma}\right)-(m+1)^2\sqrt{R(\rho,\sigma)S(\rho,\sigma)}\,\Omega(\rho,\sigma)=0$$

Extrait du calcul de René Lagrange pour le système axisymétrique 3D

Nous allons maintenant analyser l'équation du scalaire U d'une manière similaire à l'analyse menée par un article assez fondamentale de Renée Lagrange de 1939 :« Les familles de surfaces de révolution qui possèdent des harmoniques », dans lequel l'auteur analyse les conditions pour lesquelles la séparabilité simple ou la R-séparabilité dans un système axisymétrique est rendu possible et l'équation différentielle ordinaire qui sous tend une fonction de révolution à la base de la définition du système de coordonnées orthogonales dans le plan méridien.

De la condition d'orthogonalité : $\frac{\partial F}{\partial \rho}\frac{\partial F}{\partial \sigma}+\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}=0$ *on peut déduire l'existence d'une fonction λ(ρ,σ) telle que :*

$$\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma}}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial \rho}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}}=\lambda(\rho,\sigma)\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}=\lambda\frac{\partial F}{\partial \sigma}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}=-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial F}{\partial \rho}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}R(\rho,\sigma)=\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)^2+\lambda^2\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)^2\\ S(\rho,\sigma)=\frac{1}{\lambda^2}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)^2+\lambda^2\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)^2\right)\end{cases}\rightarrow\sqrt{\frac{R}{S}}=\lambda$$

$$On\ note\quad (H_1)^{-2}=\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)^2+\lambda^2\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)^2\rightarrow\sqrt{RS}=\frac{1}{\lambda(H_1)^2}$$

Et l'équation au dérivées partielles dans le plan méridien s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{F}{\lambda}\frac{\partial \Omega}{\partial \rho}\right)+\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(F\lambda\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}\right)-(m+1)^2\frac{\Omega}{F\lambda H_1{}^2}=0$$

La séparabilité est assurée si la fonction prend la forme $\Omega(\rho,\sigma)=f(\rho,\sigma)N(\rho)T(\sigma)$*, où f est une fonction de séparation, et si l'équation se sépare en deux équations différentielle ordinaire. D'abord l'équation précédente s'écrit sous la forme :*

$$\frac{F}{\lambda N}\left\{\frac{\partial^2 N}{\partial \rho^2}+\frac{\partial N}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(Log\left(\frac{f^2F}{\lambda}\right)\right)\right\}+\frac{F\lambda}{T}\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial \sigma^2}+\frac{\partial T}{\partial \sigma}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(Log\left(\lambda f^2F\right)\right)\right\}+\frac{1}{f}\left\{\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{F}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)+\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(F\lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)\right\}-\frac{(m+1)^2}{F\lambda H_1{}^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda N}\left\{\frac{\partial^2 N}{\partial \rho^2}+\frac{\partial N}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(Log\left(\frac{f^2F}{\lambda}\right)\right)\right\}+\frac{\lambda}{T}\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial \sigma^2}+\frac{\partial T}{\partial \sigma}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(Log\left(\lambda f^2F\right)\right)\right\}+\frac{1}{f\,F}\left\{\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{F}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)+\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(F\lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)\right\}-\frac{(m+1)^2}{F^2\lambda H_1{}^2}=0$$

La première condition de séparabilité est que les deux expressions soit la somme de termes, l'un dépendant uniquement de ρ et l'autre de σ :

$$Log\left(\frac{f^2F}{\lambda}\right)=a(\rho)+b(\sigma)\qquad Log\left(\lambda f^2F\right)=c(\rho)+d(\sigma)\Leftrightarrow Log(\lambda)=d(\rho)+e(\sigma)\qquad Log\left(f^2F\right)=f(\rho)+g(\sigma)$$

En prenant une forme de la fonction λ telle que : $Log(\lambda)=d(\rho)+e(\sigma)\Leftrightarrow\lambda=\frac{n(\rho)}{t(\sigma)}$*, alors le système d'équation pour les fonctions s'écrit :*

$$\begin{cases}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}=\frac{n(\rho)}{t(\sigma)}\frac{\partial F}{\partial\sigma}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}=-\frac{t(\sigma)}{n(\rho)}\frac{\partial F}{\partial\rho}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{n(\rho)}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}=\frac{1}{t(\sigma)}\frac{\partial F}{\partial\sigma}\\ \frac{1}{t(\sigma)}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}=-\frac{1}{n(\rho)}\frac{\partial F}{\partial\rho}\end{cases}$$

En prenant des primitives des fonctions n et t comme variable à la place de ρ et σ alors le système s'écrit :

$$\begin{cases}\tilde{t}(\sigma)=\int d\sigma\, t(\sigma)\\ \tilde{n}(\rho)=\int d\rho\, n(\rho)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{n}}=\frac{\partial F}{\partial\tilde{t}}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{t}}=-\frac{\partial F}{\partial\tilde{n}}\end{cases}$$

Système qui équivaut à choisir une fonction λ=1 par ce changement de variable. Donc oin n restreint pas la généralité de l'étude en posant : λ=1.

Si l'on pose λ=1, la conséquence immédiate est que les deux fonctions F et Φ sont toutes deux harmoniques (et conjuguées l'une de l'autre par la condition d'orthogonalité) :

$$\begin{cases}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}=\frac{\partial F}{\partial\sigma}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}=-\frac{\partial F}{\partial\rho}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\sigma^2}=0\\ \frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial\sigma^2}=0\end{cases}$$

<u>Remarque : c'est l'argument classique qui permet de choisir comme système de coordonnées orthogonales, parmi les parties réelles et imaginaires des fonctions analytiques du plan complexe.</u>

Les conditions pour la séparabilité sont $Log(Ff^2)=p_1(\rho)+q_1(\sigma)$*. Par ailleurs on peut noter avec l'hypothèse λ=1 (ne restreint pas la généralité du propos selon R.Lagrange) que :*

$$R(\rho,\sigma)=S(\rho,\sigma)\Rightarrow\Delta_1=(H_1)^{-2}=\left(\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^2$$

Ainsi la deuxième condition nécessaire pour que l'équation soit séparable est que le terme :

$$\frac{1}{Ff}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(F\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(F\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)\right\}-\frac{(m+1)^2\Delta_1}{F^2}$$

soit également somme d'un terme dépendant uniquement de ρ et d'un terme uniquement de σ, ce qui conduit si cela doit être vrai quelque soit m à la double condition :

$$\begin{cases}\frac{1}{F\,f}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(F\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(F\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)\right\}=g(\rho)+h(\sigma)\\ \frac{\Delta_1}{F^2}=g_1(\rho)+h_1(\sigma)\end{cases}$$

La première de ces deux conditions est immédiatement vérifiée, en posant d'abord

$$p_1(\rho)=2\int d\rho\, r(\rho) \qquad q_1(\sigma)=2\int d\sigma\, s(\sigma)\Rightarrow f=\frac{1}{\sqrt{F}}e^{\int d\rho\, r(\rho)}e^{\int d\sigma\, s(\sigma)}$$

Puis en écrivant:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial\rho}=-\dfrac{f}{2F}\dfrac{\partial F}{\partial\rho}+r(\rho)f=-\dfrac{f}{2}\dfrac{\partial LogF}{\partial\rho}+r(\rho)f \quad et \quad \dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\sqrt{F}f\right)=r(\rho)\sqrt{F}f\\ \dfrac{\partial f}{\partial\sigma}=-\dfrac{f}{2F}\dfrac{\partial F}{\partial\sigma}+s(\sigma)f=-\dfrac{f}{2}\dfrac{\partial LogF}{\partial\sigma}+s(\sigma)f \quad et \quad \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sqrt{F}f\right)=s(\sigma)\sqrt{F}f\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}=-\frac{f}{2}\frac{\partial^2 LogF}{\partial\rho^2}+\frac{f}{4}\left(\frac{\partial LogF}{\partial\rho}\right)^2-r(\rho)f\frac{\partial LogF}{\partial\rho}+r'(\rho)f+(r(\rho))^2 f \qquad \frac{\partial^2 LogF}{\partial\rho^2}=\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)=-\frac{1}{F^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)^2+\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial^2\rho}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(F\dfrac{\partial f}{\partial\rho}\right)=F\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}-\dfrac{f}{2}\left(\dfrac{\partial LogF}{\partial\rho}\right)^2+r(\rho)f\dfrac{\partial LogF}{\partial\rho}\right)=Ff\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 LogF}{\partial\rho^2}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial LogF}{\partial\rho}\right)^2+r'(\rho)+(r(\rho))^2\right)=Ff\left(\dfrac{1}{4F^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial\rho}\right)^2-\dfrac{1}{2F}\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2\rho}+r'(\rho)+(r(\rho))^2\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(F\dfrac{\partial f}{\partial\sigma}\right)=Ff\left(\dfrac{1}{4F^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^2-\dfrac{1}{2F}\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2\sigma}+s'(\sigma)+(s(\sigma))^2\right)\end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\frac{1}{F\,f}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(F\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(F\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)\right\}=-\frac{1}{2F}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial\sigma^2}\right)+\frac{1}{4F^2}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^2\right)+r'(\rho)+(r(\rho))^2+s'(\sigma)+(s(\sigma))^2$$

Cela démontre donc la première décomposition.

<u>Si nous revenons à notre équation équation aux dérivées partielles dans le contexte de la séparabilité à 4 dimensions :</u>

Alors l'équation de la fonction Ω s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{(F(\rho,\sigma))^2}{\lambda(\rho,\sigma)}\frac{\partial\,\Omega(\rho,\sigma)}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left((F(\rho,\sigma))^2\lambda(\rho,\sigma)\frac{\partial\,\Omega(\rho,\sigma)}{\partial\sigma}\right)-(m+n+1)(m+n+2)\frac{\Omega(\rho,\sigma)}{\lambda(\rho,\sigma)(H_1(\rho,\sigma))^2}=0$$

Que l'on va simplifier en omettant les arguments dans les fonctions, soit :

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{F^2}{\lambda}\frac{\partial\,\Omega}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(F^2\lambda\frac{\partial\,\Omega}{\partial\sigma}\right)-(m+n+1)(m+n+2)\frac{\Omega}{\lambda H_1{}^2}=0$$

Si la fonction Ω est définit au moyen d'une formule de séparation : $\Omega(\rho,\sigma)=f(\rho,\sigma)N(\rho)T(\sigma)$*, où f est une fonction de séparation, alors l'équation précédente s'écrit sous la forme :*

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{F^2}{\lambda N}\left\{\frac{\partial^2 N}{\partial\rho^2}+\frac{\partial N}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(Log\left(\frac{F^2f^2}{\lambda}\right)\right)\right\}+\frac{F^2\lambda}{T}\left\{\frac{\partial^2 N}{\partial\sigma^2}+\frac{\partial N}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(Log\left(\lambda F^2f^2\right)\right)\right\}+\\ +\frac{1}{f}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{F^2}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(F^2\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)\right\}-\frac{(m+n+1)(m+n+2)}{\lambda H_1^{\,2}}=0\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\lambda N}\left\{\frac{\partial^2 N}{\partial\rho^2}+\frac{\partial N}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(Log\left(\frac{F^2f^2}{\lambda}\right)\right)\right\}+\frac{\lambda}{T}\left\{\frac{\partial^2 N}{\partial\sigma^2}+\frac{\partial N}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(Log\left(\lambda F^2f^2\right)\right)\right\}+\\ +\frac{1}{F^2f}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{F^2}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(F^2\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)\right\}-\frac{(m+n+1)(m+n+2)}{\lambda H_1^{\,2}F^2}=0\end{array}\right\}$$

Pour que cette dernière équation se décompose en deux équations différentielles ordinaires selon ρ et σ, il est nécessaire que :

$$\left\{\begin{array}{ll}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(Log\left(\frac{F^2f^2}{\lambda}\right)\right) & \textit{indépendante de } \sigma\\ \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(Log\left(\lambda F^2f^2\right)\right) & \textit{indépendante de } \rho\end{array}\right.$$

en adoptant le même raisonnement que Renée Lagrange, page 286, et son point de vue sans restriction de généralité en posant λ=1, il vient que l'expression F^2f^2 *doit être un produit d'une fonction de ρ et d'une fonction de σ, soit donc :* $Log\left(F^2f^2\right)=p_1(\rho)+q_1(\sigma)$*. Par ailleurs on peut noter avec l'hypothèse λ=1 que :*

$$R(\rho,\sigma)=S(\rho,\sigma)\Rightarrow\Delta_1=(H_1)^{-2}=\left(\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^2$$

Ainsi la deuxième condition nécessaire pour que l'équation soit séparable est que le terme :

$$\frac{1}{F^2f}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(F^2\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(F^2\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)\right\}-\frac{(m+n+1)(m+n+2)\Delta_1}{F^2}$$

soit également somme d'un terme dépendant uniquement de ρ et d'un terme uniquement de σ, ce qui conduit si cela doit être vrai quelque soit m et n à la double condition :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{F^2f}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(F^2\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(F^2\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)\right\}=g(\rho)+h(\sigma)\\ \frac{\Delta_1}{F^2}=g_1(\rho)+h_1(\sigma)\end{array}\right.$$

Tout comme dans l'article la première de ces équations est la conséquence de deux décompositions. En posant : $p_1(\rho)=2\int d\rho\, r(\rho) \qquad q_1(\sigma)=2\int d\sigma\, s(\sigma) \Rightarrow f=\frac{1}{F}e^{\int d\rho\, r(\rho)}e^{\int d\sigma\, s(\sigma)}$ *. Ici si sous nous posons* $F=\sqrt{G}$ *, nous avons :*

$$\frac{1}{G\,f}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(G\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(G\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)\right\}=-\frac{1}{2F}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial\sigma^2}\right)+\frac{1}{4F^2}\left(\left(\frac{\partial G}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial G}{\partial\sigma}\right)^2\right)+r'(\rho)+(r(\rho))^2+s'(\sigma)+(s(\sigma))^2$$

Soit :

$$\frac{1}{F^2 f}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(F^2\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(F^2\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)\right\}=-\frac{1}{2F^2}\left(\frac{\partial^2(F^2)}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2(F^2)}{\partial\sigma^2}\right)+\frac{1}{4F^4}\left(\left(\frac{\partial(F^2)}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial(F^2)}{\partial\sigma}\right)^2\right)+r'(\rho)+(r(\rho))^2+s'(\sigma)+(s(\sigma))^2$$

$$=-\frac{1}{F^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial\sigma^2}+\left(\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^2\right)+\frac{1}{4F^2}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^2\right)+r'(\rho)+(r(\rho))^2+s'(\sigma)+(s(\sigma))^2$$

$$=-\frac{1}{F^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial\sigma^2}\right)-\frac{3}{4F^2}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^2\right)+r'(\rho)+(r(\rho))^2+s'(\sigma)+(s(\sigma))^2$$

Ce qui démontre donc la première décomposition.

Pour qu'il y ait séparabilité, il est donc nécessaire que les deux conditions suivantes soit remplies :

$$\begin{cases} Log\left(F^2 f^2\right)=p_1(\rho)+q_1(\sigma) \\ \dfrac{\Delta_1(F)}{F^2}=g_1(\rho)+h_1(\sigma) \end{cases}$$

Les intégrales primitives de la fonction F, qui par ailleurs est une fonction harmonique de ρ et σ sont donc telles que :

$$\begin{cases} \Delta F=0 \\ \dfrac{\Delta_1(F)}{F^2}=\Delta_1(Log(F)) \Rightarrow \dfrac{\partial^2\Delta_1(Log(F))}{\partial\rho\,\partial\sigma}=0 \end{cases}$$

Il y a donc deux résultats :
- la « bonne nouvelle » c'est que l'on peut construire un système de coordonnées non-orthogonales à 4 dimensions selon la paramétrisation précédente pour lequel l'équation de Laplace est séparable. Pour cette dernière on utilise l'extension de polynômes de Legendre à deux dimensions

- *la « mauvaise nouvelle » c'est que les systèmes de coordonnées sur l'équivalent d'un plan méridien à 4 dimensions sont exactement les mêmes que ceux sur d'un système axisymétrique sur son plan méridien : cartesien, polaire, elliptique, parabolique, et leur inversion par rapport à l'origine des coordonnées, courbes quartiques de la famille des cyclides de Dupin (ce sont des sections de cyclides de révolution, René Lagrange les désignent par « courbes cartésiennes », Limaçon de Pascal, cardïoide, courbes à trois foyers , …). Dommage que l'étude ne puissent introduire de nouvelles catégories de courbes*

à finir : introduire la forme de la fonction de révolution et de séparation, voir travaux de René Lagrange